

COMMENT ETUDIER LE SIGNE D'UNE EXPRESSION ?

- Connaître les signes évidents, immédiats.
 - Pour tout nombre réel x , x^2 est **positif**, (signe + dans un tableau), ($x^2 \geq 0$).
 - Pour tout nombre réel x , $-x^2$ est **négatif** (signe – dans un tableau), ($-x^2 \leq 0$).
 - $\sqrt{x} \geq 0$, pour tout nombre réel positif x .
 - $e^x > 0$ pour tout réel x .
- Connaître les signes évidents en fonction de l'intervalle d'appartenance de x :
 - Si $x \in [1 ; 5]$, alors $x > 0$
 - Si $x \in [-6 ; -3]$, alors $x < 0$.
- Il est fondamental de connaître la nature de l'expression dont on veut étudier le signe :

1°) **Sommes de signe évident**

- Somme de deux nombres positifs : $x^2+1 > 0$, $2x+x^2 \geq 0$ si $x \geq 0$, $5x^2+10x > 0$ si $x \in [1 ; 5]$.
- Somme de deux nombres négatifs : $-3-x^2 < 0$ car somme d'un nombre strictement négatif et d'un réel négatif ou nul. ($-3-x^2 = -3 + (-x^2)$)

2°) **Somme du type $ax+b$ ($a \neq 0$).**

On peut soit :

- Résoudre les inéquations $ax+b < 0$, puis $ax+b > 0$ et en déduire les intervalles sur lesquels $ax+b$ est négatif (de signe -) ou positif (de signe +) .

Si $a < 0$, ne pas oublier le changement de sens de l'inégalité au moment de la division par a .

- Résoudre l'équation $ax+b = 0$ et utiliser la règle suivante :

- Si $a < 0$ alors le tableau de signes est du type :

- Si $a > 0$ alors le tableau de signes est du type :

Exemples : étudier le signe des expressions suivantes :

$2x+3$; $4x-5$; $-10x+3$; $2+4x$; $1+x$; $5-8x$; $6-3x$; $-x+10$; $1-x$; $3-x$; $-x+1$.

3°) **Somme du type ax^2+bx+c** (trinôme du second degré) : bien repérer $a =$, $b =$, $c =$

- Si le **trinôme** est **complet** ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$), alors calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: *bien veiller à ce que b ne prenne pas « froid » en l'entourant par des parenthèses, s'il est négatif.*

Ensuite appliquer les règles suivantes :

- Si $\Delta < 0$, alors le **trinôme est du signe de a** et n'admet aucune racine.
- Si $\Delta = 0$ alors le **trinôme est du signe de a** tout en admettant une racine dite double $X_0 = \frac{-b}{2a}$

En résumé, dans ces deux cas ($\Delta < 0$ ou $\Delta = 0$), si a est négatif, alors le trinôme est négatif ; si a est positif, alors le trinôme est positif.
(Je dis bien a !).

- Si $\Delta > 0$, alors le trinôme est partout du signe de a (encore lui !), sauf entre les racines où il est du signe contraire de a .

Comme vous l'avez compris un trinôme du second est la plupart du temps du signe de ... **a** , sauf entre ses deux racines (quand $\Delta > 0$!)

- Si le trinôme $f(x)$ est incomplet, (il n'y a que deux termes), sans « ventre » b , ou « fin » c , alors il est inutile de calculer le discriminant Δ . Par contre bien repérer a , « $a =$ »
Essayer de factoriser le trinôme par des méthodes simples utilisées en Seconde :

Rechercher un facteur commun et/ou une identité remarquable.

Pour trouver les racines du trinôme, Il suffit donc de résoudre l'équation $f(x)=0$, puis pour le signe du trinôme, appliquer les mêmes règles que précédemment :

- Soit le signe du trinôme est immédiat, du signe de a .
- Soit le trinôme est partout du signe de a sauf entre ses racines où il est du signe contraire de a .

Exemples : étudier le signe des trinômes :

1. $4x^2 - 36$ ($a=3$; pour trouver les racines, résoudre l'équation $4x^2 - 36 = 0$ en utilisant une identité remarquable.)

2. $-10x^2 + 2x$ ($a=-10$, mettre x en facteur puis trouver les racines)

Exercices : Etudier le signe des trinômes suivants après avoir fait le tri entre les trinômes complets et incomplets (Ne pas oublier de repérer « a ») :

$5x^2 - 8x + 4$; $3x^2 - 6x$; $x^2 - 3x + 1$; $5x^2 + 10x$; $-x^2 + 5x + 1$; $2x + x^2$;
 $25x - 150x^2$; $3x^2 - 27$; $4x^2 - 16$; $4 - x^2$; $1 - x^2$; $-8x^2 + 32$; $x^2 - 3$.

4°) Produit

- Soit le signe est immédiat : $3(2x-5)^2 \dots$; $-(x+1)^2 \dots$
- Soit on réalise un tableau de signes dans lequel on fait apparaître le signe de chacun des facteurs et on utilise la règle du signe d'un produit.

Exercices : Etudier le signe des expressions suivantes :

$$-5(x-2)(x+3) ; \quad -3(x-1)^2(x+4) ; \quad 2(3x-1)(4-x) ; \quad x^2(x-3).$$

5°) Quotient (Ne pas oublier la ou les valeurs interdites).

- Soit le signe est immédiat : $\frac{-5}{(x-1)^2} \dots$; $\frac{3}{-x^2} \dots$; $\frac{7}{(2x-1)^2} \dots$
- Soit on réalise un tableau de signes dans lequel on fait apparaître le signe du numérateur et celui du dénominateur et on utilise la règle du signe d'un quotient .

Exercices : étudier le signe des expressions suivantes :

$$\frac{(2x-1)(x+3)}{x-5} ; \quad \frac{-5x^2}{2-x} ; \quad \frac{4x^3}{(x-3)^2}$$

6°) Utilisation du tableau de variation

Si une fonction f admet sur un intervalle I un **minimum strictement positif** (en fait ne descend pas plus bas qu'un nombre positif), alors on peut dire que **$f(x)$ est strictement positif sur I .**

Si une fonction f admet sur un intervalle I un **maximum strictement négatif** (en fait ne monte pas plus haut qu'un nombre négatif), alors on peut dire que **$f(x)$ est strictement négatif sur I .**

7°) Détermination du signe de f graphiquement (Attention ! Cela ne constitue pas une preuve)

On observe la position de la courbe C_f de f par rapport à l'axe des abscisses.

Si C_f est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle I , alors $f(x)$ est positif sur I .

Si C_f est en-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle I , alors $f(x)$ est négatif sur I .

