

Tournoi 2015 (corrigé lycée)

Chassez l'intrus

(uniquement pour les secondes)

Arthur choisit un entier n puis il calcule la somme de tous les entiers de 1 à n : $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$. Malheureusement il est distrait et il a ajouté deux fois l'un des entiers. Sachant qu'il n'a pas fait d'autre erreur et qu'il obtient comme total 2015, que valait n et quel est le nombre qu'il a ajouté deux fois ?

On admet que $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (bonus pour la démonstration de la formule).

Notons x l'entier qu'Arthur a ajouté deux fois. On a à résoudre l'équation $\frac{n(n+1)}{2} + x = 2015$ avec x compris entre 1 et n . On en déduit : $\frac{n(n+1)}{2} + 1 \leq 2015 \leq \frac{n(n+1)}{2} + n$. On obtient en multipliant par 8 : $(2n+1)^2 \leq 16113$ et $16129 \leq (2n+3)^2$ d'où $2n+1 \leq 126,9$ et $127 \leq 2n+3$. La seule valeur entière pour n est $n = 62$ d'où l'on déduit $x = 2015 - \frac{62 \times 63}{2} = 62$.

Bonus : Soit $S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$.

On a aussi $S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$.

En ajoutant par colonne on obtient : $2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$ d'où : $2S = n(n+1)$.

Des rectangles avec des tiges

(uniquement pour les premières et terminales)

On dispose de n tiges métalliques de longueurs 1, 2, 3, ..., n cm et on cherche à former un rectangle en mettant bout à bout ces n tiges. Quelles sont les deux plus petites valeurs de n permettant de former un rectangle non aplati avec les n tiges ?

Comme il y a 4 côtés et qu'un côté ne peut pas être égal à 1, il faut au moins 5 baguettes.

On voit rapidement que ce n'est pas possible pour $n=5$ et $n=6$ mais que c'est possible pour $n=7$ et $n=8$.

Combien peut-on former de rectangles non superposables pour ces deux valeurs de n ?

Pour $n=7$, le périmètre est égal à $28 = 2 \times 14$. On peut former 4 rectangles non aplatis :

un de largeurs 3 et 1+2, de longueurs 4+7 et 5+6

un de largeurs 5 et 1+4, de longueurs 2+7 et 3+6

un de largeurs 6 et 2+4, de longueurs 1+7 et 3+5

un carré de côtés 7, 1+6, 2+5 et 3+4.

Pour $n=8$, le périmètre est égal à $36 = 2 \times 18$. On peut former 7 rectangles non aplatis :

un de largeurs 3 et 1+2, de longueurs 7+8 et 4+5+6

un de largeurs 4 et 1+3, de longueurs 6+8 et 2+5+7

un de largeurs 5 et 1+4, de longueurs 6+7 et 2+3+8

un de largeurs 6 et 1+5, de longueurs 4+8 et 2+3+7

un de largeurs 7 et 1+6, de longueurs 3+8 et 2+4+5

un de largeurs 8 et 1+7, de longueurs 4+6 et 2+3+5

un carré de côtés 1+8, 2+7, 3+6 et 4+5.

Pour quels entiers n peut-on former un rectangle non aplati avec les n tiges ?

La somme des longueurs des tiges doit être égale au périmètre du rectangle et doit donc être un entier pair. Il faut donc que de $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ soit un entier pair ou encore que 4 divise le produit $n(n + 1)$. C'est seulement le cas quand 4 divise n ou quand 4 divise $n+1$, donc quand $n=4k-1$ ou quand $n=4k$.

Si $n=4k-1$, on peut former un rectangle de largeurs 3 et $1+2$ car il reste alors $4+(4k-1) = 5+(4k-2) = \dots = (2k+1)+(2k+2)$ soit $2(k-1)$ sommes égales à $4k+3$: on peut donc former deux longueurs égales à $(k-1)(4k+3)$.

Si $n=4k$ avec $k \geq 3$, on peut former un rectangle de largeurs 3 et $1+2$ car il reste alors :

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$9+(4k) = 10+(4k-1) = \dots = (2k+4)+(2k+5)$ soit $2(k-2)$ sommes égales à $4k+9$: on peut donc former deux longueurs égales à $15+(k-2)(4k+9)$.

Pour quels entiers n peut-on former un carré avec les n tiges ?

Pour pouvoir former un carré, le périmètre doit être multiple de 4, donc $n(n+1)$ doit être multiple de 8. C'est seulement possible si 8 divise n ou si 8 divise $n+1$.

Si $n=8q-1$, on a $8q-1=1+(8q-2)=2+(8q-3)=\dots=(4q-1+4q)$ donc $4q$ sommes égales à $8q-1$: on peut former un carré de côté $q(8q-1)$.

Si $n=8q$, on a $1+8q=2+(8q-1)=3+(8q-2)=\dots=(4q+4q+1)$ donc $4q$ sommes égales à $8q+1$: on peut former un carré de côté $q(8q+1)$.

Toujours par 17

(pour tous)

On dispose de 2015 jetons qui sont blancs d'un côté et noirs de l'autre. Au départ tous les jetons sont posés sur une table, le côté noir étant visible. Une étape consiste à choisir 17 jetons puis à les retourner. Combien faut-il d'étapes au minimum pour que tous les jetons montrent leur face blanche ?

Comme $2015 = 17 \times 118 + 9$, il faut au moins 119 étapes. C'est possible avec 119 étapes.

Les 117 premières étapes consistent à retourner 17 jetons noirs, il y a ensuite 26 jetons noirs et 1989 blancs sur la table. Si pour la 118^{ème} étape on retourne x noirs et $17-x$ blancs, il y aura $26 - x + 17 - x$ jetons noirs sur la table. En choisissant $x = 13$, il reste 17 jetons noirs que l'on retourne à la 119^{ème} étape.

Même question en partant de 2016 jetons (en retournant à chaque étape 17 jetons).

Comme $2016 = 17 \times 118 + 10$, il faut au moins 119 étapes.

Mais si à une étape on retourne x jetons noirs et $17 - x$ jetons blancs, le nombre de jetons noirs varie de $x - (17 - x) = 2x - 17$ qui est un nombre impair. Pour passer de 2016 jetons noirs à 0 jetons noirs il faut donc un nombre pair d'étapes, donc au moins 120 étapes. Montrons que c'est possible avec 120 étapes.

Les 118 premières étapes consistent à retourner 17 jetons noirs, il y a ensuite 10 noirs et 2005 blancs sur la table. Si pour la 119^{ème} étape on retourne x noirs et $17-x$ blancs, il y aura $10 - x + 17 - x$ jetons noirs sur la table. En choisissant $x = 5$, il reste 17 jetons noirs que l'on retourne à la 120^{ème} étape.

Généralisez à un nombre n de jetons, $n > 17$ (en retournant à chaque étape 17 jetons).

Posons $n = 17q + r$ avec $0 \leq r \leq 16$ et $q \geq 1$.

Si $r = 0$, on retourne q fois 17 jetons noirs.

Sinon, il faut au moins $q + 1$ étapes.

Mais si à une étape on retourne x jetons noirs et $17 - x$ jetons blancs, le nombre de jetons noirs varie de $x - (17 - x) = 2x - 17$ qui est un nombre impair. Pour passer de n jetons noirs à 0 jetons noirs, le nombre d'étapes doit donc avoir la même parité que n .

Si r est impair, $q + 1$ a la même parité que $17q + r = n$, donc $q + 1$ étapes vont suffire :

on retourne d'abord $(q-1)$ fois 17 jetons , il reste ensuite $17 + r$ jetons noirs ; si on retourne ensuite x jetons noirs et $17-x$ blancs, il restera $17 + r - x + 17 - x$ jetons noirs ; en prenant $x = \frac{17+r}{2}$, il reste 17 jetons noirs que l'on retourne à la $(q+1)^{\text{ème}}$ étape.

Si r est pair, $q + 1$ n'a pas la même parité que $17q + r = n$, donc il faut au moins $q + 2$ étapes :

on retourne d'abord q fois 17 jetons , il reste ensuite r jetons noirs ; si on retourne ensuite x jetons noirs et $17-x$ blancs, il restera $r - x + 17 - x$ jetons noirs ; en prenant $x = \frac{r}{2}$, il reste 17 jetons noirs que l'on retourne à la $(q+2)^{\text{ème}}$ étape.

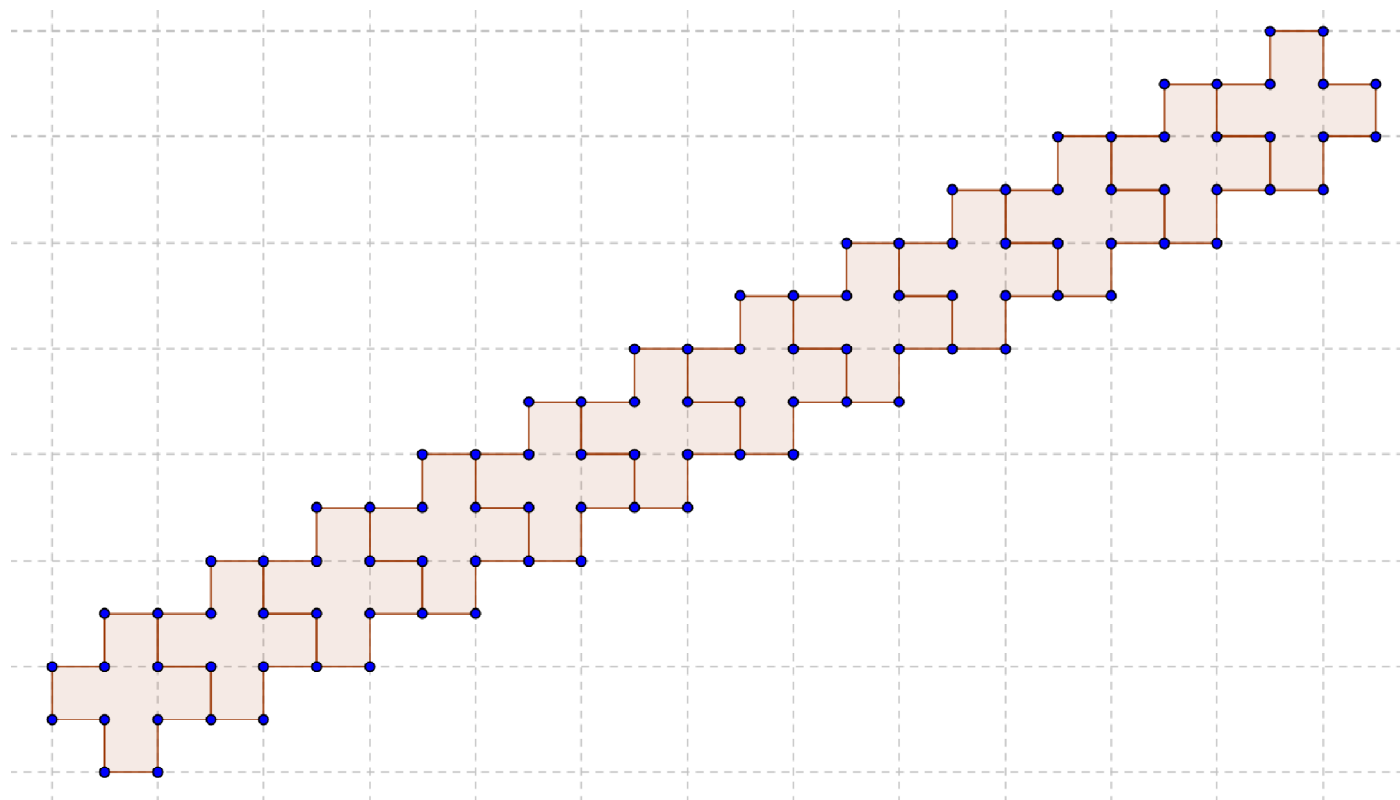
Avec des croix

(pour tous)

On dispose de 2015 croix identiques constituées de 5 carrés de côtés de longueur 1 cm. On assemble ces croix, pour former un polygone, de façon que deux croix en contact se touchent par 3 côtés.

Quel est le plus grand périmètre que l'on peut obtenir pour un polygone formé de cette façon avec les 2015 croix ?

Pour avoir un périmètre le plus grand possible il faut limiter au maximum les contacts entre les croix. On peut par exemple aligner les 2015 croix en enfilade comme sur ce dessin fait avec 12 croix :

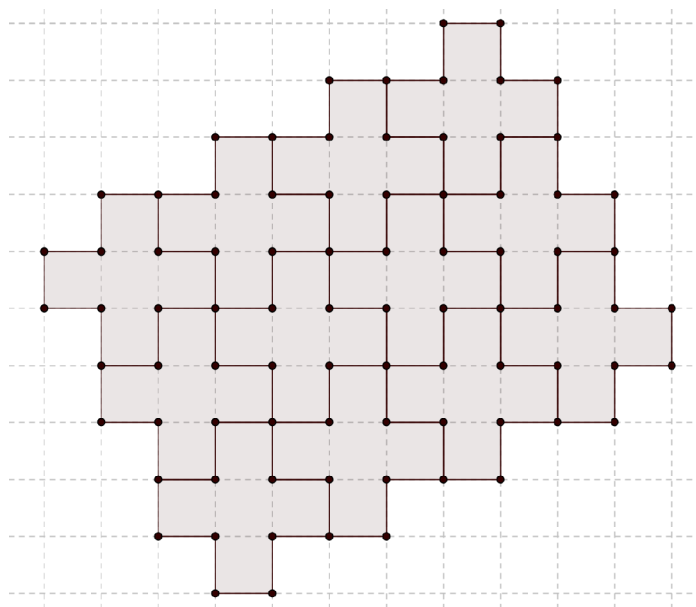


Il y a 2014 contacts entre deux croix. Chaque contact ayant pour longueur 3, il retire 6 à la somme des

périmètres des 12 croix. Comme chaque croix a pour périmètre 12, le périmètre du polygone est égal à :
 $2015 \times 12 - 2014 \times 6 = 12096$.

Quel est le plus petit périmètre que l'on peut obtenir pour un polygone formé de cette façon avec les 2015 croix ?

Pour avoir un périmètre le plus petit possible il faut compacter les croix pour avoir un maximum de contacts, comme sur ce dessin fait avec 12 croix :



Si on compacte p alignements de q croix, il y a $p \times (q - 1) + q \times (p - 1)$ contacts entre deux croix donc on obtient un périmètre égal à $12pq - 6(2pq - p - q) = 6(p + q)$.

En y accolant r croix (avec $r < p \leq q$), il y a $r + (r-1) = 2r - 1$ nouveaux contacts, donc le périmètre augmente de $12r - 6(2r-1) = 6$. On obtient finalement un périmètre égal à $6(p + q + 1)$.

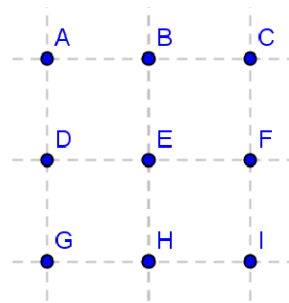
Il faut donc minimiser $p + q$ quand $n = pq + r$ avec $r < p$.

Pour $2015 = 44 \times 45 + 35$ on obtient un périmètre égal à $6(44+45+1) = 540$.

Schéma de déverrouillage (pour tous)

Neuf points A, B, C, D, E, F, G, H et I sont placés aux sommets de 4 carrés de côtés de longueur 1cm. Une permutation des 9 points définit une ligne brisée joignant successivement les points dans l'ordre de la permutation (un segment de la ligne peut passer éventuellement par un des 9 points).

Par exemple pour la ligne définie par la permutation A-F-G-C-D-I-B-H-E, les segments [GC] et [BH] passent par E. Quelle est la longueur de cette ligne brisée ?



$AF = FG = CD = DI = IB = \sqrt{5}$, $GC = 2\sqrt{2}$, $BH = 2$ et $HE = 1$. La ligne a pour longueur:
 $5\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 3 \approx 17,009$.

Quelle est la plus petite longueur pour une ligne brisée formée à partir d'une permutation des 9 points ?

Pour avoir la plus petite longueur, il faut joindre les points par des segments de longueur égale à 1, par exemple la ligne ABCFEDGHI. On obtient une longueur égale à 8.

Essayez de trouver la plus grande longueur pour une telle ligne brisée.

Les segments joignant deux points ont pour longueurs possibles : 1, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{8}$.

Une ligne brisée est formée de 8 segments ; pour trouver la plus grande longueur il faut choisir un maximum de grands segments, mais il faut au moins un segment de longueur 1 ou $\sqrt{2}$ pour joindre le point E.

Premier cas : il y a deux segments de longueur $\sqrt{8}$ (joignant deux sommets opposés). Il y a alors au maximum 4 segments de longueur $\sqrt{5}$ (car ces segments partent d'un sommet du grand carré). On peut compléter par 2 et 1 (mais pas $\sqrt{2}$) pour obtenir la longueur $2\sqrt{8} + 4\sqrt{5} + 3 \cong 17,6$. Exemple : la ligne EHCGBIAFD.

S'il n'y a que 3 segments de longueur $\sqrt{5}$, on peut compléter avec 2 segments de longueur 2 et un de longueur $\sqrt{2}$ pour obtenir $2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} + \sqrt{2} + 4 \cong 17,78$. Exemple : la ligne EIAFDCGBH.

Si on complète avec 2 fois 2 et 1 on obtient seulement $2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} + 5 \cong 17,365$.

Avec au plus 2 segments de longueur $\sqrt{5}$ la ligne est plus courte.

Deuxième cas : il y a un seul segment de longueur $\sqrt{8}$. Il y a alors au maximum 6 segments de longueur $\sqrt{5}$ et on complète par 1 pour obtenir $\sqrt{8} + 6\sqrt{5} + 1 \cong 17,245$. Exemple : la ligne EBGFAIDCH.

S'il y a 5 segments de longueur $\sqrt{5}$ on peut compléter par 2 et $\sqrt{2}$ pour obtenir $\sqrt{8} + 5\sqrt{5} + \sqrt{2} + 2 \cong 17,42$. Exemple : la ligne EIAFGBHCD.

Avec au plus 4 segments de longueur $\sqrt{5}$ la ligne est plus courte.

Troisième cas : il n'y a pas de segment de longueur $\sqrt{8}$. Il y a alors au maximum 7 segments de longueur $\sqrt{5}$ et on complète par $\sqrt{2}$ pour obtenir $7\sqrt{5} + \sqrt{2} \cong 17,067$. Exemple la ligne EAFGBIDCH. Avec au plus 6 segments de longueur $\sqrt{5}$ la ligne est plus courte.

La ligne la plus longue a donc pour longueur 17,78 cm. Il existe au total 11 longueurs supérieures à 17 : celle donnée en exemple, les 5 précédentes et 4 autres : $2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 2 \cong 17,193$, $\sqrt{8} + 4\sqrt{5} + \sqrt{2} + 4 \cong 17,187$, $2\sqrt{8} + 2\sqrt{5} + 7 \cong 17,129$ et $2\sqrt{8} + 4\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1 \cong 17,015$.